www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

Epreuve de MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Coef. : 4

ECOLE NATIONALE DE L'AVIATION CIVILE
CONCOURS ELEVE-PILOTE DE TRANSPORT (EPT-T)
(B.T.S. - D.U.T. - Mathématiques spéciales T)

Session Avril 1990

N.B. : Les quatre parties sont totalement indépendantes, de même que les quatre exercices de la partie 1.

PARTIE 1 Exercices

Exercice a

1) Pour tout nombre complexe z , on pose :

$z^3 - (16 - i)\, z^2 + (89 - 16\, i)\, z + 89\, i = f(z)$.

Montrer que l'équation $f(z) = 0$ a une racine imaginaire pure que l'on déterminera.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

3) Etudier, dans le plan complexe, la nature du triangle ayant pour sommets les images des trois racines de cette équation.

Exercice b

Pour tout $\theta \in]\, 0\, ,\, \frac{\pi}{2}\, [$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$,

calculer le reste de la division du polynôme :

$P_n(X) = (X \sin\theta + \cos\theta)^n$

par $X^2 + 1$.

Exercice c

n et p désignant deux entiers naturels non nuls, calculer la limite lorsque x tend vers 1 de :

$$f(x) = \frac{n\, x^{n+1} - (n+1)\, x^n + 1}{x^{p+1} - x^p - x + 1}$$

Exercice d

Etudier la limite lorsque x tend vers 0 de :

$$g(x) = \frac{\sin(\operatorname{tg} x) - \operatorname{tg}(\sin x)}{x^6}$$

.../..

PARTIE 2

a) Soit S l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ complexes définies par la donnée de u_0 et u_1 et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \; ; \quad u_{n+2} = 2 \cos \theta \, u_{n+1} - u_n \quad \text{où } \theta \text{ est un réel donné.}$$

Trouver, dans S, l'ensemble des suites qui sont géométriques.

b) Démontrer que S est un espace vectoriel sur le corps des complexes dont on donnera la dimension.

c) Trouver la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de S telle que $u_0 = 1$ et $u_1 = \cos \theta$

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se propose d'étudier l'existence d'un polynôme P_n d'indéterminée X tel que si pour tout x, réel ou complexe, on pose $X = x + \frac{1}{x}$ (*) alors :

$$P_n \left(x + \frac{1}{x}\right) = x^n + \frac{1}{x^n}$$

1) Supposant qu'un tel polynôme existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la somme :

$$P_{n+2}(X) - X P_{n+1}(X) + P_n(X)$$

2) Etablir alors l'existence et l'unicité du polynôme P_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3) Préciser le degré de P_n et le coefficient de son terme de plus haut degré.

e) Utilisant le résultat de la question c), calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(2\cos\theta)$.

.../...

PARTIE 3

a) A tout n de $\mathbb{N}$, on associe les intégrales :

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^n t \, dt$$

et

$$J_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^n t \, \sin^2 t \, dt$$

1) Etablir une relation entre I_n, J_n et I_{n+2}.

2) Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.

3) Calculer I_0 et I_1. En déduire, pour tout p de $\mathbb{N}$, les valeurs respectives des intégrales I_{2p} et I_{2p+1}.

b) On s'intéresse à la fonction $f : x \mapsto f(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{x \cos t} \, dt .$$

1) Montrer que la fonction f est paire en étudiant : $f(x) - f(-x)$.
Dans la suite du problème on ne considèrera que des valeurs positives de x.

2) Démontrer que pour n dans $\mathbb{N}$ et pour tout $x \geq 0$ on a :

$$\left| f(x) - \sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!} I_p \right| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^x$$

3) En déduire que f est développable en série entière en x et expliciter son développement en utilisant les résultats du a) 3).

c) Démontrer que la fonction f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est solution pour tout x réel, de l'équation différentielle :

$$x\,y'' + y' - x\,y = 0$$

.../...

PARTIE 4

1) Calculer, pour toute fonction z définie et continûment dérivable sur $[-1, 1]$, l'intégrale : $\int_{-1}^{1} [(x^2 - 1)\, z'(x) + 2x\, z(x)]\, dx$

2) A tout λ réel on associe l'équation différentielle :

$$(E_\lambda) : (x^2 - 1)\, y'' + 2xy' - \lambda y = 0 .$$

λ_1 et λ_2 désignant deux valeurs distinctes de λ, on suppose qu'il existe une solution y_1 de (E_{λ_1}) et une solution y_2 de (E_{λ_2}) sur $[-1, 1]$. Utilisant le résultat du 1), calculer l'intégrale :

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \int_{-1}^{1} y_1(x)\, y_2(x)\, dx$$

3) Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur $[-1, 1]$;
En fonction de x, de f et des dérivées successives de f, calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la dérivée d'ordre $n + 1$ de la fonction g définie par :

$$g : x \mapsto g(x) = (x^2 - 1)\, f'(x) - 2nx\, f(x).$$

4) n étant donné dans $\mathbb{N}$, calculer la solution particulière $u : x \mapsto u(x)$ de l'équation différentielle

$$(x^2 - 1)\, u'(x) - 2nx\, u(x) = 0 \qquad \text{telle que } u(0) = (-1)^n$$

5) a) Des résultats précédents déduire que, dans le cas particulier où $\lambda = n(n + 1)$, n étant un entier naturel, l'équation différentielle (E_λ) admet des solutions polynômiales de la forme :

$$y : x \mapsto y(x) = k \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2 - 1)^n\right), \qquad \text{où } k \text{ est un réel quelconque.}$$

b) On appelle P_n celle de ces solutions qui vérifie la condition :
$P_n(1) = 1$. A quelle valeur de k correspond-elle ?

6) a) Des résultats du 2) déduire, pour tout couple (m, n) d'entiers naturels distincts, la valeur de l'intégrale : $\int_{-1}^{1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx$

b) Calculer l'intégrale : $\int_{-1}^{1} P_n^{\,2}(x)\, dx$

Qu'en conclure concernant la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail